Logique classique et logique floue

Synthèse de lectures

de

Benoit Lavoie

benoit@benoit-lavoie.ca

Programme de Doctorat en Informatique Cognitive

Université du Québec à Montréal

8 février 2007

Table des matières

1. Description de la problématique

Ce document présente les principes de base qui distinguent la logique floue de la logique classique et montre les avantages qu'on peut en tirer de la logique floue dans un domaine de l'informatique cognitive.

La section 2 présente un aperçu de la logique classique et la section 3 présente un aperçu de la logique floue. Ces sous-sections introduisent des notions utilisées dans les sous-sections suivantes. La section 4 décrit en détails les distinctions entre la logique classique et la logique floue. La section 5 décrit les avantages de la logique floue dans un domaine donné de l'informatique cognitive. La section 6 décrit les limites de la logique floue pour l'informatique cognitive en général. Finalement la section 7 contient la liste des principales références.

Ce document est une synthèse de lectures préparée dans le cadre du programme de Doctorat en Informatique Cognitive de l'Université du Québec à Montréal (UQAM).

2. Aperçu de la logique classique

Généralités

La logique classique est la logique formelle la plus utilisée aujourd'hui et ses premiers développements remontent aux travaux d'Aristote (Klir & Yuan, 1995). La logique classique est caractérisée par un ensemble de propriétés (décrites plus bas) dont (i) la propriété du tiers exclu, (ii) la propriété de non-contradiction et (iii) la propriété de monotonie de l'implication.

La logique classique se distingue de la logique floue par la propriété du tiers exclu et la propriété de non-contradiction qui ne s'appliquent pas à la logique floue dans les cas généraux (voir détails plus bas). La logique classique se distingue de la logique non monotone (Lavoie, 2007b) par la propriété de monotonie de l'implication qui ne s'applique pas à la logique non monotone.

La logique classique comprend deux domaines principaux: (i) la logique d'ordre zéro (aussi appelée logique des propositions ou logique propositionnelle) et (ii) la logique d'ordre un (aussi appelée logique des prédicats).

Logique des propositions

La logique des propositions concerne la combinaison de propositions arbitraires dont la structure interne, contrairement à la logique d'ordre un, n'est pas pertinente. Les propositions et leurs combinaisons ont des valeurs de vérité binaires qui sont soit totalement *vrai* (on représente souvent *vrai* par la valeur *1*), soit totalement *faux* (on représente souvent *faux* par la valeur *0*). Les propositions sont représentables par des variables logiques et sont combinables avec des connecteurs logiques afin de former des formules logiques. Pour *n* variables logiques binaires, les valeurs des variables forment 2^n combinaisons différentes qui représentent 2^{2^n} (2 puissance 2, puissance n) fonctions logiques possibles.

Trois connecteurs logiques standards primitifs peuvent être combinés aux variables afin d'obtenir des formules correspondant à toutes les fonctions logiques valides: le connecteur unaire de négation (¬)[1] et les connecteurs binaires de disjonction ($\vee$) et de conjonction ($\wedge$). Deux autres connecteurs binaires standards (implication ($\Rightarrow$) et équivalence ($\Leftrightarrow$)), dont les fonctionnalités peuvent être obtenues avec les connecteurs primitifs, sont souvent utilisés pour la spécification de règles d'inférence et de règles d'équivalence.

Logique des prédicats

La logique des prédicats étend la logique d'ordre zéro en distinguant la structure interne d'une proposition. En logique des prédicats la proposition est composée d'un prédicat et de zéro ou plusieurs arguments: *P (a1, a2, …, an)* . Dans le cas de prédicats à zéro arguments, la logique d'ordre un correspond à la logique d'ordre zéro. Les arguments peuvent correspondre à des constantes, des fonctions ou des variables. Les variables peuvent être liées à des quantificateurs, dont deux sont standards: le quantificateur universel ($\forall$) et le quantificateur existentiel ($\exists$) dont les interprétations sont les suivantes:

- ($\forall$x) P(x): pour chaque x inclu dans l'ensemble universel X (ensemble incluant toutes les valeurs possibles de la variable x), P(x) est vrai;
- ($\exists$x) P(x): Il existe un x inclu dans l'ensemble universel X tel que P(x) est vrai.

3. Aperçu de la logique floue

Généralités

Le terme de *logique floue* a deux acceptions (Klir & Yuan, 1995; Klir & al, 1997). Au sens strict (acception la plus généralement utilisée et à laquelle nous référons ici), il s'agit d'une logique formelle du raisonnement approximatif basée sur la théorie des ensembles flous. Au sens général, le terme de *logique floue* est synonyme à celui de *théorie des ensembles flous*. La logique floue et la théorie des ensembles flous ont été introduites principalement par Lotfi Zadeh (1965 — citation Klir & Yuan, 1995). Ses concepts reposent sur des notions développées antérieurement en philosophie par Jan Lukasiewicz (logique à valeurs multiples) et Max Black (description d'opérations sur des ensembles flous). La logique floue généralise la logique classique avec des variables logiques et des formules logiques prenant des degrés de valeur de vérité quelconques entre 0 (faux) et 1 (vrai) inclusivement: 0 correspond à totalement faux, 1 correspond à totalement vrai, et les valeurs entre 0 et 1 exclusivement,]0,1[, correspondent aux degrés de vérité floue entre totalement faux et totalement vrai. La logique classique avec ses valeurs de vérité booléennes de 0 et 1 est considérée comme un cas particulier de la logique floue.

4. Distinctions entre la logique classique et la logique floue

La logique floue se distingue de la logique classique à différents niveaux: (i) la théorie d'ensemble sous-jacente et les

[1] Les notations utilisées en logique varient dans la littérature. La notation logique employée dans cette section est basée sur celle employée par Klir & Yuan (1995).

valeurs de vérité (ou valeurs des fonctions d'appartenance à un ensemble) supportées sont différentes; (ii) les propriétés de tiers exclu et de non-contradiction qui s'appliquent à la logique classique ne s'appliquent pas à la logique floue dans les cas généraux; (iii) la logique floue inclut des versions généralisées des opérations de conjonction, disjonction et négation; (iv) la logique floue inclut différentes versions de l'opération d'implication qui sont parfois incompatibles avec l'implication en logique classique (donc différentes règles d'équivalences logiques reliées aux implications); (v) la logique floue inclut des modificateurs linguistiques s'appliquant aux prédicats et aux valeurs de vérité; (vi) la logique floue inclut des quantificateurs flous; et (vii) la logique floue inclut des règles d'inférence qui sont des généralisations des règles d'inférence de la logique classique. Le reste de cette sous-section décrit ces principales distinctions.

Théorie des ensembles

Similarités entre la logique classique et la logique floue:

La logique classique et la logique floue sont formalisables dans le cadre de théories d'ensembles: (i) la théorie des ensembles classiques permet de formaliser la logique classique et (ii) la théorie des ensembles flous permet de formaliser la logique floue.

La théorie des ensembles flous et la théorie des ensembles classiques sont basées sur des concepts de base similaires et qui peuvent être mis en correspondance avec les concepts utilisés par la logique floue et la logique classique (voir tableau suivant) :

Quelques concepts standards utilisés en théories des ensembles (classiques ou flous)	Concepts correspondants utilisés en logique (classique et floue)
$\cup$ (union)	$\vee$ (disjonction)
$\cap$ (intersection)	$\wedge$ (conjonction)
— (différence)	$\neg$ (négation)
$\subseteq$ (inclusion)	$\Rightarrow$ (implication)
X (ensemble universel)	1 (vrai)
$\varnothing$ (ensemble vide)	0 (faux)

Tableau 1. Correspondances entre concepts en théories d'ensembles et en logiques: adaptation de (Klir & Yuan, 1995, p. 215)

Différences entre la logique classique et la logique floue:

La théorie des ensembles classiques est un cas particulier de la théorie des ensembles flous. Conséquemment, la logique classique est également un cas particulier de la logique floue.

Le reste de cette section décrit d'autres similarités et différences entre la logique classique et la logique floue et qui sont reliées aux similarités et différences des théories d'ensembles sous-jacentes.

Valeurs de vérité

La notion de valeur de vérité en logique classique et en logique floue est reliée à la notion de valeur d'appartenance à un ensemble en théorie des ensembles. En théorie des ensembles classiques deux valeurs d'appartenance sont possibles: (i) un élément appartient totalement à un ensemble (l'appartenance totale est parfois représentée par la valeur 1), ou (ii) un élément n'appartient pas du tout à un ensemble (la non-appartenance totale est parfois représentée par la valeur 0). En théorie des ensembles flous, une infinité de valeurs d'appartenance sont possibles en théorie: (i) un élement appartient totalement à un ensemble, ou (ii) il n'appartient pas du tout à cet ensemble, ou (iii) il appartient que partiellement à cet ensemble à un degré variant de 0 à 1 exclusivement.

Similarités entre la logique classique et la logique floue:

La logique classique et la logique floue supportent les valeurs de vérité 0 (totalement faux) et 1 (totalement vrai): mais comme indiqué plus bas, la loqique floue supporte également d'autres valeurs de vérité.

Différences entre la logique classique et la logique floue:

La logique classique ne supporte que les valeurs de vérité 0 (totalement faux) et 1 (totalement vrai) alors que la logique floue supporte ces valeurs ainsi que les valeurs intermédiaires entre 0 et 1 (i.e. des valeurs indiquant partiellement faux et partiellement vrai). La distinction dans la gamme des valeurs de vérité supportées en logique classique et la logique floue est illustrée en théorie des ensembles par les fonctions d'appartenance représentées aux Figures 4 et 5. La Figure 4 (adaptation de Havinga, 1999) illustre les valeurs de deux fonctions d'appartenance (ou fonctions caractéristiques) en théorie des ensembles classiques. La Figure 5 (Havinga, 1999) illustre les valeurs de deux fonctions d'appartenance en théorie des ensembles flous. Dans chacune des figures, la fonction discontinue représentée en vert indique l'appartenance d'un spectre de couleur (variant de blanc à noir) à l'ensemble blanc. La fonction discontinue représentée en jaune indique l'appartenance du même spectre de couleur à l'ensemble noir. La Figure 4 illustre qu'en théorie des ensembles classiques, soit qu'un élément appartienne totalement à un ensemble soit qu'il ne lui appartienne pas du tout (similairement, en logique classique une valeur de vérité est soit totalement vraie, soit totalement fausse). La Figure 5 illustre qu'en théorie des ensembles flous, un élément appartient à un ensemble à un degré variant de 0 à 1 inclusivement (similairement, en logique floue une valeur de vérité varie de 0 à 1 inclusivement et peut être est en partie vraie et en partie fausse).

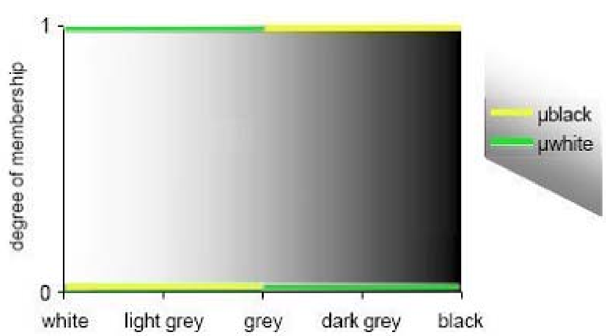

Figure 1. Fonctions d'appartenance (fonctions caractéristiques) en théorie des ensembles classiques (adaptation de: Havinga, 1999)

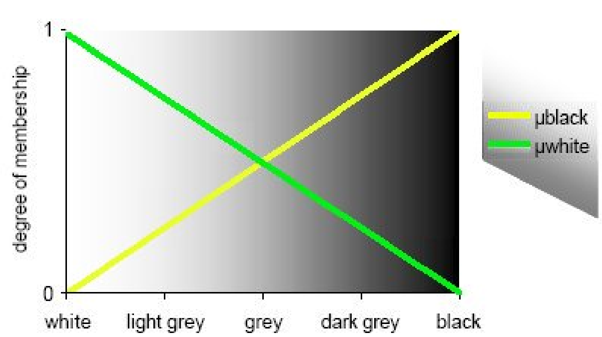

Figure 5. Fonctions d'appartenance en théorie des ensembles flous (source: Havinga, 1999)

Opération de conjonction ($\wedge$)

La notion d'opération de conjonction ($\wedge$) en logique classique et en logique floue est reliée à la notion d'intersection ($\cap$) en théorie des ensembles.

Similarités entre la logique classique et la logique floue:

L'opérateur de conjonction en logique classique et la version standard de l'opérateur de conjonction en logique floue sont généralement similaires. Il s'agit d'opérateurs binaires retournant comme résultat la valeur minimale des deux arguments:

- $x \wedge y \equiv \min(x, y)$ où $\equiv$ indique une équivalence de formules et *min ()* représente une fonction retournant la valeur minimale de ses arguments.

Différences entre la logique classique et la logique floue:

En logique classique l'opérateur de conjonction ne supporte que des arguments dont les valeurs sont 0 ou 1, et l'opérateur ne retourne comme résultat que 0 ou 1. La spécification mathématique de la fonction de conjonction de la logique classique est la suivante:

- $\wedge : \{0,1\}x\{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ où $\{0,1\}$ représente l'ensemble comprenant les valeurs 0 et 1.

En logique floue l'opérateur de conjonction standard est une version généralisée de l'opérateur de conjonction de la logique classique: l'opérateur supporte toutes les valeurs entre 0 et 1 inclusivement. La spécification mathématique de la fonction de conjonction standard de la logique floue est la suivante:

- $\wedge : [0,1]x[0,1] \rightarrow [0,1]$ où $[0,1]$ représente l'intervalle des valeurs entre 0 et 1 inclusivement.

Opération de disjonction ($\vee$)

La notion d'opération de disjonction ($\vee$) en logique classique et en logique floue est reliée à la notion d'union ($\cup$) en théorie des ensembles.

Similarités entre la logique classique et la logique floue:

L'opérateur de disjonction en logique classique et la version standard de l'opérateur de disjonction en logique floue sont généralement similaires. Il s'agit d'opérateurs binaires retournant comme résultat la valeur maximale des deux arguments:

- $x \vee y \equiv \max(x, y)$ où *max ()* représente une fonction retournant la valeur maximale de ses arguments.

Différences entre la logique classique et la logique floue:

En logique classique l'opérateur de disjonction ne supporte que des arguments dont les valeurs sont 0 ou 1 et l'opérateur ne retourne comme résultat que 0 ou 1. La spécification mathématique de la fonction de disjonction de la logique classique est la suivante:

- $\vee : \{0,1\}x\{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$

En logique floue l'opérateur de disjonction standard est une version généralisée de l'opérateur de disjonction de la logique classique: l'opérateur supporte toutes les valeurs entre 0 et 1 inclusivement. La spécification mathématique de la fonction de disjonction standard de la logique floue est la suivante:

- $\vee : [0,1]x[0,1] \to [0,1]$

Opération de négation (¬)

La notion d'opération de négation (¬) en logique classique et en logique floue est reliée à la notion de différence (—) en théorie des ensembles.

Similarités entre la logique classique et la logique floue:

L'opérateur de négation en logique classique et la version standard de l'opérateur de négation en logique floue sont généralement similaires. Il s'agit d'opérateurs unaires retournant comme résultat la différence entre la valeur 1 et la valeur de l'argument:

- $\neg x \equiv 1 - x$

Différences entre la logique classique et la logique floue:

En logique classique l'opérateur de négation ne supporte qu'un argument dont la valeur est 0 ou 1 et l'opérateur ne retourne comme résultat que 0 ou 1. La spécification mathématique de la fonction de négation de la logique classique est la suivante:

- $\neg: \{0,1\} \to \{0,1\}$

En logique floue l'opérateur de négation standard est une version généralisée de l'opérateur de négation de la logique classique: l'opérateur supporte toutes les valeurs entre 0 et 1 inclusivement. La spécification mathématique de la fonction de négation standard de la logique floue est la suivante:

- $\neg: [0,1] \to [0,1]$

Opération d'implication (⇒)

La notion d'opération d'implication (⇒) en logique classique et en logique floue est reliée à la notion d'inclusion (⊆) en théorie des ensembles.

Similarités entre la logique classique et la logique floue:

En logique classique et en logique floue l'opérateur d'implication est un opérateur binaire. Il existe différentes versions de l'opérateur d'implication en logique floue et la plupart des versions (mais pas tous) se comportent pareillement à l'opérateur d'implication de la logique classique pour des arguments dont les valeurs sont 0 ou 1; i.e. qu'à partir des mêmes arguments de valeurs de vérité 0 ou 1, les différentes versions de l'opérateur d'implication de la logique floue retournent généralement les mêmes valeurs que l'implication en logique classique, mais il y a des exceptions (voir plus bas).

Différences entre la logique classique et la logique floue:

En logique classique l'opérateur d'implication ne supporte que des arguments dont les valeurs sont 0 ou 1 et l'opérateur ne retourne comme résultat que 0 ou 1. La spécification mathématique de la fonction d'implication de la logique classique est la suivante:

- $\Rightarrow : \{0,1\}x\{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$

L'opérateur d'implication de la logique classique est associé à l'équivalence logique suivante:

- $(x \Rightarrow y) \equiv (\neg x \vee y)$

En logique floue l'opérateur d'implication prend deux arguments dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1 inclusivement. Toutefois, il existe différentes versions de l'opérateur dont certaines retournent une valeur comprise entre 0 et 1 inclusivement alors que d'autres retournent seulement 0 ou 1. Les spécifications mathématiques des deux alternatives de la fonction d'implication en logique floue sont les suivantes:

- $\Rightarrow : [0,1]x[0,1] \rightarrow [0,1]$
- $\Rightarrow : [0,1]x[0,1] \rightarrow \{0,1\}$

Il existe quatre principaux types d'opérateurs d'implication en logique floue, chacun des types ayant plusieurs versions. Les types d'opérateurs d'implication et leurs équivalences logiques correspondantes sont les suivants:

- Type *S*: $(x \Rightarrow y) \equiv (\neg x \vee y)$
- Type *QL*: $(x \Rightarrow y) \equiv (\neg x \vee (x \wedge y))$
- Type *R*: $(x \Rightarrow y) \equiv \sup (r \in [0,1] \mid (x \wedge y) \leq y)$ où *sup* () est une fonction de la borne supérieure (supremum) de l'ensemble de valeurs.
- Type *t-norm*: $(x \Rightarrow y) \equiv (x \wedge y)$

Parmi tout ces types d'implication, seul le type *t-norm* est incompatible avec l'implication de la logique classique; avec $x = 0$, l'implication de type *t-norm* retourne 0 alors que l'implication de logique classique retourne 1. Cependant, le type *t-norm* est le plus utilisé en pratique à cause que l'équivalence avec $x \wedge y$ est simple à déterminer et donne des résultats qui sont intuitifs à comprendre lorsqu'appliqué à des valeurs floues. La grande variété des implications en logique floue reflète le problème de traiter des valeurs floues entre 0 et 1.

Propriété de tiers exclu

La propriété de tiers exclu peut s'exprimer par l'équivalence logique suivante: $x \vee \neg x \Leftrightarrow 1$. Cette équivalence signifie qu'une proposition ou sa négation est toujours vraie.

Similarités entre la logique classique et la logique floue:

Avec les valeurs de vérité 0 et 1, la propriété de tiers exclu s'applique à la logique classique (cas général) et à la logique floue (cas particulier); voir détails plus bas.

Différences entre la logique classique et la logique floue:

En logique classique la propriété de tiers exclu s'applique en tout temps avec des valeurs valides (i.e. 0 ou 1).

En logique floue la propriété ne s'applique pas généralement; e.g.

- o $0.5 \vee \neg 0.5 = 0.5 \vee 0.5$ (par la définition de la négation floue)

  $= 0.5$ (par la définition de la disjonction floue)

  $\neq 1$ (ne satisfait pas la propriété de tiers exclu)

Propriété de non-contradiction

La propriété de non-contradiction (aussi appelée propriété de contradiction) peut s'exprimer par l'équivalence logique suivante: $x \wedge \neg x \Leftrightarrow 0$. Cette équivalence signifie qu'une proposition et sa négation résultent en une contradiction.

Similarités entre la logique classique et la logique floue:

Avec les valeurs de vérité 0 et 1, la propriété de non-contradiction s'applique à la logique classique (cas général) et à la logique floue (cas particulier); voir détails plus bas.

Différences entre la logique classique et la logique floue:

En logique classique la propriété de non-contradiction s'applique en tout temps avec des valeurs valides (i.e. 0 ou 1).

En logique floue la propriété de non-contradiction ne s'applique généralement pas; e.g.

- o $0.5 \wedge \neg 0.5 = 0.5 \wedge 0.5$ (par la définition de la négation floue)

  $= 0.5$ (par la définition de la conjonction floue)

  $\neq 0$ (ne satisfait pas la propriété de non-contradiction)

Autres propriétés standards de la logique classique

Similarités entre la logique classique et la logique floue:

Les propriétés standards suivantes de la logique classique s'appliquent également à la logique floue:

- Idempotence: $x \vee x \Leftrightarrow x$, $x \wedge x \Leftrightarrow x$
- Identité: $x \vee 0 \Leftrightarrow x$, $x \wedge 1 \Leftrightarrow x$, $x \wedge 0 \Leftrightarrow 0$, $x \vee 1 \Leftrightarrow 1$
- Involution: $x \Leftrightarrow \neg\neg x$
- Commutativité: $(x \wedge y) \Leftrightarrow (y \wedge x)$, $(x \vee y) \Leftrightarrow (y \vee x)$
- Distributivité: $x \vee (y \wedge z) \Leftrightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, $x \wedge (y \vee z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
- Associativité: $x \vee (y \vee z) \Leftrightarrow (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \wedge z$
- De Morgan: $\neg (x \wedge y) \Leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$, $\neg (x \vee y) \Leftrightarrow (\neg x \wedge \neg y)$
- Équivalence: $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$
- Monotonie de l'implication: $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (x, z \Rightarrow y)$

i.e. l'ajout de *z* aux prémisses conserve la validité d'une implication sans *z :* voir Lavoie (2007b) pour plus de détails sur la monotonie de l'implication.

Propositions et modificateurs linguistiques

Similarités entre la logique classique et la logique floue:

Les propositions de la logique classique sont un cas particulier de celles de la logique floue: la syntaxe et la valeur de vérité d'une proposition de logique classique d'ordre zéro ou d'ordre un sont supportées en logique floue.

Les règles de base de combinaison de propositions en formules logiques sont similaires en logique classique et en logique floue.

Différences entre la logique classique et la logique floue:

En logique classique une proposition ne peut avoir que 0 ou 1 comme valeur de vérité. La proposition en logique d'ordre un a un prédicat qui ne peut pas être modifié par une fonction.

En logique floue une proposition peut avoir toute valeur comprise entre 0 et 1 inclusivement comme valeur de vérité. Les prédicats des propositions peuvent être modifiés par des modificateurs linguistiques dont les fonctionnalités sont comparables à celles de fonctions: si *M* est un modificateur linguistique et *P(x)* est une proposition formée d'un prédicat logique avec argument x, alors *M (P(x))* est une proposition modifiée par le modificateur linguistique *M*. Les modificateurs ont des formes linguistiques afin d'en faciliter la compréhension: ils correspondent généralement à des adjectifs ou des adverbes qui modifient les valeurs de vérité des propositions. Si *P(x)* peut être exprimé linguistiquement par *x est P* (par exemple, *x est grand*), alors *M (P(x))* peut être exprimé linguistiquement par *x est M P* (par exemple, *x est très grand*), La spécification des modificateurs linguistiques est liée au domaine d'application considéré. Conventionnellement, un modificateur linguistique modifie la valeur de vérité d'une proposition par le biais d'une puissance appliquée à la valeur de vérité. Par exemple, les modificateurs linguistiques *un peu*, *légèrement*, *très*, et *extrêmement* sont parfois assignés aux puissances 1.3, 1.7, 2 et 3 respectivement (Negnevitsky, 2002, p. 97): par exemple, si *P(x)* a pour valeur de vérité 0.25 alors *un peu (P(x))* a pour valeur de vérité $0.25^{1.3}$ ou 0.16.

Quantificateurs

Similarités entre la logique classique et la logique floue:

En logique classique et en logique floue les variables des propositions peuvent être liées à des quantificateurs universel (∀) ou existentiel (∃).

Différences entre la logique classique et la logique floue:

En logique floue les variables des propositions peuvent être liées également à divers quantificateurs flous (dont les quantificateurs universel et existentiel sont des instances) (Klir & al, 1997, pp. 206-209). On distingue deux types de quantificateurs flous:

- Quantificateurs flous absolus: *au moins un, environ 10, …*
- Quantificateurs flous relatifs: *presqu'aucun, environ la moitié,* …

Les quantificateurs flous peuvent permettre de mieux préciser le sens de formules logiques que les quantificateurs classiques. Par exemple l'expression "*almost all snakes are poisonous*" se traduit en logique classique par $(\exists x)\ (snake(x) \wedge poisonous(x))$. Mais cette traduction est très imprécise car elle n'indique pas que ce ne sont pas tous les serpents qui sont venimeux et que c'est la majorité des serpents qui le sont.

Différentes procédures existent afin de déterminer les valeurs de vérité des propositions qui incluent des quantificateurs flous (Klir & Yuan, 1995).

Inférence

Similarités entre la logique classique et la logique floue:

Le raisonnement en logique classique et en logique floue est fondé sur le même type de règles d'inférence: e.g.

- Modus ponens: $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
- Modus tollens: $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$

Cependant la logique floue supporte également des versions généralisées de ces règles (ce que ne supporte pas la logique classique; voir plus bas).

Différences entre la logique classique et la logique floue:

La logique classique ne supporte que les règles d'inférence où les propositions représentées par des variables de même nom dans les règles sont identiques (e.g. les règles de modus ponens et le modus tollens); i.e. la variable *p* trouvée en conclusion d'une règle représente exactement la même proposition que la variable *p* trouvée dans l'antécédent de la règle. L'exacte correspondance des propositions dont les variables ont les mêmes noms ainsi que les valeurs booléennes associées à ces propositions permettent le raisonnement exact.

La logique floue supporte des versions généralisées des règles d'inférence de la logique classique. Dans une règle généralisée les variables de noms similaires trouvées dans l'antécédent et la conclusion de la règle peuvent représenter des propositions similaires ou légèrement différentes. Les différences correspondent généralement à différents quantificateurs flous ou différents modificateurs flous associés aux propositions. Par exemple dans les versions généralisées suivantes du modus ponens et du modus tollens, les pairs de variables *p* et *p'* ainsi que *q* et *q'* représentent des propositions dont le contenu peut varier:

- Modus ponens généralisé: $((p \Rightarrow q) \wedge p') \Rightarrow q'$
- Modus tollens généralisé: $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q') \Rightarrow \neg p'$

Les règles d'inférence généralisées résultent en un raisonnement approximatif où les prémisses imprécises peuvent entraîner des conclusions imprécises.

5. Avantages de la logique floue dans un domaine de l'informatique cognitive: les systèmes experts flous

Les systèmes experts

Un système expert est un système à base de connaissances modélisant l'expertise humaine dans un domaine donné (Memmi, 2004a). Cette modélisation est souvent basée sur la logique classique, la logique floue et/ou les arbres de décisions, qui ont chacun différents avantages et limites: voir Lavoie (2007a) pour plus de détails.

Les connaissances du système sont généralement développées par des humains ayant l'expertise du domaine considéré. Les connaissances d'experts sont aussi souvent subjectives (variant d'un expert à un autre) et font souvent références à des termes définis vaguement. Les systèmes experts flous sont en mesure de supporter cela.

Les systèmes experts flous

Un système expert flou est un système expert basé sur la logique floue. Dans le contexte des systèmes experts, la logique floue est particulièrement utile pour la modélisation de connaissances subjectives définies vaguement par des experts humains. La logique floue offre en particulier différents avantages sur la logique classique: (i) plus grande puissance du formalisme; (ii) plus grande similarité avec l'expertise humaine; (iii) plus de facilité d'intégration de connaissances; et (iv) plus grande simplicité de développement initiale. Chacun de ces avantages est discuté dans les prochaines sous-sections.

Avantage de la logique floue au niveau de la puissance du formalisme

Le formalisme de la logique floue peut améliorer la puissance et la facilité de développement d'un système expert. Le formalisme de la logique floue est similaire à celui de la logique classique mais il est augmenté de modificateurs linguistiques et de quantificateurs flous. Les formules de logique floue permettent également d'exprimer des subtilités qui ne peuvent parfois pas être facilement exprimées avec la logique classique. Le formalisme de la logique floue est toutefois (presqu') aussi compréhensible que celui de la logique classique; le formalisme de la logique floue est une extension de celui de la logique classique et les extensions (modificateurs et quantificateurs flous en particulier) ont des formes linguistiques qui sont intuitives.

Avantage de la logique floue au niveau de la similarité avec l'expertise humaine

La logique floue permet de modéliser les connaissances avec plus de similarité sur l'expertise humaine. L'expertise humaine est basée en partie sur des termes définis vaguement et sur le raisonnement à partir de ces termes vagues. Par exemple, des termes vagues (*grands, moyens, petits,* etc.) sont souvent appliqués pour référer à la taille des personnes. Il en est également ainsi pour les inférences basées sur ces termes: e.g on infère souvent la grandeur d'une personne en comparant sa taille relativement à celle des autres. Le support des termes vagues et du raisonnement basé sur ces termes par la logique floue peut permettre de modéliser l'expertise humaine avec plus d'exactitude que ne le permet la logique classique.

Avantage de la logique floue au niveau de l'intégration de connaissances

La technique d'inférence de Mamdani (Negnevitsky, 2002, pp. 106-112) basée sur la logique floue permet d'intégrer diverses connaissances de façon intuitive. Cette technique permet également d'être appliquée dans des situations pratiques où les données d'entrées et les sorties sont numériques. Cette technique est souvent utilisée dans des systèmes experts flous et dans des systèmes de contrôle flou. La technique d'inférence de Mamdani consiste en quatre étapes: (1) *flouification*: conversion des données numériques en valeurs floues; (2) *évaluation des règles*: application des règles d'inférence; (3) *agrégation*: combinaison des conclusions en une seule conclusion; et (4) *déflouification*: conversion de la valeur floue finale en valeur réelle.

La flouification et déflouification permettent l'application de la technique dans des situations où les données ont des valeurs exactes (e.g. valeurs numériques). Lors de l'évaluation des règles toutes les règles dont les antécédents sont partiellement vrais sont déclenchées (en logique classique seule une règle dont l'antécédent est totalement vrai serait déclenchée). L'agrégation permet à des conclusions pouvant provenir de règles développées par différents experts d'être combinées.

Avantage de la logique floue au niveau de la simplicité du développement initial

La simplicité du formalisme de la logique floue combinée aux avantages cités précédemment (puissance du formalisme, similarité avec l'expertise humaine et intégration de connaissances) favorise la simplicité de développement. En général un système expert flou est plus facile (et plus rapide) à développer initialement qu'un système expert basé sur la logique classique.

Il est à noter cependant que le raffinement et l'optimisation des règles floues représentent ce qui requière généralement le plus d'effort dans le développement d'un système expert flou. Toutefois, pour de petits domaines d'application, les bénéfices de la rapidité de développement dépassent généralement les inconvénients de l'effort de raffinement et d'optimisation.

6. Limites de la logique floue en général

Caractère arbitraire de l'opération d'implication

L'opération d'implication en logique floue est souvent considérée comme étant fondée sur des bases plus pratiques que théoriques. Il existe différentes versions de cette opération en logique floue. Ces versions sont formulées de façon à supporter les valeurs floues et certaines versions sont incompatibles avec l'implication logique (comme indiqué plus haut, pour les valeurs de vérité de 0 et 1, une implication floue peut donner des résultats différents de ceux de l'implication classique). C'est un problème important car l'opération d'implication est centrale dans un système logique; c'est par le biais de l'implication que sont formulées les règles d'inférence. Le caractère arbitraire de la spécification de l'implication en logique floue rend questionnable son fondement théorique dans la modélisation de la cognition humaine.

Pauvre performance des systèmes complexes

Les valeurs multiples de vérité en logique floue produisent plus de solutions qui requièrent plus de calcul que les valeurs booléennes en logique classique (Jantzen, 2006); par exemple en logique classique une formule à 4 variables booléennes donne 2^4 (ou 16) combinaisons de valeurs possibles alors que 4 variables à 3 valeurs de vérité (assumant une variable à 3 valeurs de vérité, mais il peut y en avoir une infinité en logique floue) donne 3^4 (ou 81) combinaisons.

Le nombre des règles floues peut croître exponentiellement avec le nombre des valeurs floues. Pour cette raison, le nombre de valeurs floues est souvent très restreint en pratique, causant une perte de précision. Cependant, même avec cette limitation, les applications de logique floue modélisent mieux que la logique classique la notion de valeur vague.

7. Remerciements

Ce travail a été financé par une bourse doctorale du Conseil de Recherches en Sciences Humaines du Canada (CRSH).

8. Références

Havinga, H.N.J.; P. van der Veer; R. Brouwer; J. Cser (1999). *Fuzzy Logic*. Technical report, Department of Civil Engineering Informatics, University of Vienna, 23 p. http://www.mat.univie.ac.at/~andrzej/papers/Report Fuzzy Logic.pdf

Jantzen, Jan (2006). *Tutorial On Fuzzy Logic*. Technical report, European Network of Excellence on Intelligent Technologies for Smart Adaptive Systems, 29 p. http://fuzzy.iau.dtu.dk/download/logic.pdf

Kaissi, Mohamad (1999). *What is 'fuzzy logic'? Are there computers that are inherently fuzzy and do not apply the usual binary logic?* Online article in Scientific American.com. http://sciam.com/print_version.cfm?articleID=000E9C72-536D-1C72-9EB7809EC588F2D7

Kantrowitz, Mark; Erik Horstkotte;Cliff Joslyn (2006). *FAQ: Fuzzy Logic and Fuzzy Expert Systems*. Online document, Carnegie Mellon University. http://www.faqs.org/faqs/fuzzy-logic/part1/

Kay, Russell (2004) *Sidebar: Seven Truths of Fuzzy Logic*. Online article in Computerworld, http://www.computerworld.com/news/2004/story/0,11280,95499,00.html

Klir, George; Bo Yuan (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice-Hall.

Klir, George; Ute St.Clair; Bo Yuan (1997). *Fuzzy Set Theory: Foundations and Applications*. Prentice-Hall.

Lavoie, Benoit (2007a). *Approches symboliques et sous-symboliques en représentation de connaissances*. Synthèse de lectures, Programme de Doctorat en Informatique Cognitive, Université du Québec à Montréal. 21 p. http://www.benoit-lavoie.ca/public/docs/Approches_symboliques_et_sous-symboliques_en_representation_de_connaissances.pdf

Lavoie, Benoit (2007b). *Raisonnement non monotone*. Synthèse de lectures, Programme de Doctorat en Informatique Cognitive, Université du Québec à Montréal. 11 p. http://www.benoit-lavoie.ca/public/docs/Raisonnement_non_monotone.pdf

Memmi, Daniel (2004a). *Méthodes symboliques*. Notes de cours (Introduction à l'informatique cognitive), Université du Québec à Montréal.

Negnevitsky, Michael (2002). Fuzzy expert systems. Chapter 4 of *Artificial Intelligence: A Guide to Intelligent Systems*. Addison Wesley, pp. 87–128.

Xexéo, Geraldo (not published). *Fuzzy Logic*. Technical report. Computing Science Department and Systems and Computing. Engineering Program. Federal University of Rio de Janeiro
http://mida.edor.it/documentazioneVaria/mida8/pdf/FuzzyLogic(Xexeo).pdf