

# Raisonnement non monotone

## Synthèse de lectures

de

Benoit Lavoie

[benoit@benoit-lavoie.ca](mailto:benoit@benoit-lavoie.ca)

Programme de Doctorat en Informatique Cognitive

Université du Québec à Montréal

8 février 2007

## Table des matières

1. DESCRIPTION DE LA PROBLÉMATIQUE .....	1
2. APERÇU DU RAISONNEMENT MONOTONE.....	1
3. NOTIONS DE BASE DU RAISONNEMENT NON MONOTONE.....	2
4. MODÉLISATION DE L'ACQUISITION DE CONNAISSANCES AVEC LE RAISONNEMENT NON MONOTONE.....	7
5. REMERCIEMENTS.....	8
6. RÉFÉRENCES.....	8

# 1. Description de la problématique

Ce document présente les notions de base de la théorie du raisonnement non monotone et montre comment elle permet de modéliser l'acquisition de connaissances.

La section 2 présente un aperçu du raisonnement monotone et de sa formalisation logique. La section 3 présente les notions de base du raisonnement non monotone. La section 4 présente un exemple de modélisation de l'acquisition de connaissances basée sur la logique non monotone. Finalement la section 5 contient la liste des principales références.

Ce document est une synthèse de lectures préparée dans le cadre du programme de Doctorat en Informatique Cognitive de l'Université du Québec à Montréal (UQAM).

## 2. Aperçu du raisonnement monotone

### Raisonnement monotone

Le raisonnement monotone (ou raisonnement déductif standard) est un processus d'inférence basé sur des informations complètes, de véracité invariable, et dont les conclusions demeurent toujours valides avec l'ajout de nouvelles informations (Brewka et al, 1997, p. 1). Les conclusions des inférences croissent de façon monotone avec l'ajout de nouvelles connaissances. Le raisonnement monotone est formalisé avec la logique monotone.

### Logique monotone

La logique monotone (ou logique déductive standard) est une logique formelle dont la relation de conséquence (l'implication) est monotone<sup>1</sup>. Une logique est *monotone* si, pour toute formule qui est un théorème dans une théorie formelle particulière, cette formule reste un théorème si la théorie originale est augmentée en y ajoutant des axiomes valides. L'ensemble de ses théorèmes augmente quand l'ensemble des axiomes augmente. La monotonie de l'implication peut être spécifiée de la manière suivante:

Si  $(x \Rightarrow y)$  Alors  $(x, z \Rightarrow y)$

où l'ajout de  $z$  aux prémisses conserve la validité de l'implication sans  $z$ . Dans l'exemple suivant, si on ajoute un axiome valide  $\alpha$  à la théorie  $T1$  pour obtenir la théorie augmentée  $T1'$ , les inférences valides dans  $T1$  demeurent valides dans  $T1'$  (adaptation de l'exemple de Morgenstern, 1999) :

( $T1$ ) *Tous les hommes sont mortels*  
*Socrate est un homme*  
-----  
*Donc, Socrate est mortel*

( $T1'$ ) *Tous les hommes sont mortels*  
*Socrate est un homme*  
 $\alpha$   
-----  
*Donc, Socrate est mortel*

La logique classique (voir question/réponse #3) est monotone.

<sup>1</sup> Adaptation d'une définition de la logique non monotone (Wikipedia, 2006m; présentée plus bas) pour la logique monotone.

Les avantages de la logique monotone incluent les suivants: (i) les inférences n'ont pas à être révisées à la suite de nouvelles connaissances; et (ii) les solutions sont semi-décidables: si un théorème est prouvable dans une théorie, alors il existe un algorithme permettant de le déterminer en un temps fini. La logique non monotone qui est présentée plus loin n'est pas semi-décidable et peut nécessiter la révision des inférences à l'ajout de nouvelles connaissances.

Une des limites importantes de la logique monotone consiste au fait que la base de connaissances ne peut pas être augmentée avec des connaissances qui sont contradictoires (inconsistantes) aux connaissances courantes.

### 3. Notions de base du raisonnement non monotone

#### Raisonnement non monotone

Le raisonnement non monotone est un processus d'inférence basé sur des informations partielles ou de véracité incertaine et dont les conclusions peuvent être rétractées avec l'ajout de nouvelles informations: les conclusions ne croissent pas nécessairement de façon monotone avec l'ajout de nouvelles connaissances. Le raisonnement non monotone est traditionnellement formalisé de façon symbolique avec la logique non monotone.

#### Motivations pour le raisonnement non monotone

Une des motivations pour l'utilisation du raisonnement non monotone concerne sa similarité avec le raisonnement humain: par manque d'information ou manque de temps, une personne doit souvent raisonner avec des connaissances partielles et réviser les conclusions au besoin lorsqu'elle a plus d'informations (i.e. la personne saute aux conclusions).

En général, le raisonnement non monotone est motivé par plusieurs raisons pratiques:

- Permettre le raisonnement avec des informations plausibles: e.g. *birds typically fly*;
- Permettre le raisonnement en l'absence d'informations complètes: e.g. *pouvoir inférer que Tweety puisse voler sachant que Tweety est un oiseau, sans toutefois savoir quel type d'oiseau*.
- Éviter d'énumérer toutes les conditions ou exceptions à une règle (problème de qualification); e.g. au lieu de formuler:

*If I turn the key in the ignition and the battery works and there's gas in the tank and there is no potato in the tailpipe and ... then the car will start.*

formuler plutôt:

*Usually when I turn the key in the ignition, the car will start.*

#### Logique non monotone

La logique non monotone est une logique formelle dont la relation de conséquence (l'implication) est non monotone (Wikipedia, 2006m). En logique non monotone une formule qui est un théorème dans une théorie formelle ne reste pas nécessairement un théorème lorsque cette théorie est augmentée: avec l'accroissement de nouvelles prémisses l'ensemble des conclusions ne croît pas de façon monotone; les croyances précédentes peuvent changer (voir être éliminées). Dans

l'exemple suivant, la théorie augmentée  $T2'$  contient des prémisses additionnelles à  $T2$  et également une conclusion différente de celle obtenue avec  $T2$  (adaptation de l'exemple de Morgenstern, 1999):

( $T2$ ) *Birds typically fly*  
*Tweety is a bird*  


---

*Therefore Tweety presumably flies*

( $T2'$ ) *Birds typically fly*  
*Tweety is a bird*  
*Penguins are birds*  
*Penguins do not fly*  
*Tweety is a penguin*  


---

*Therefore Tweety presumably does'nt fly*

Un avantage important de la logique non monotone est qu'elle permet l'inférence avec des axiomes incomplets et/ou de véracité incertaine.

Une limite de la logique non monotone consiste au fait que les inférences peuvent nécessiter des révisions avec l'ajout de nouvelles prémisses. Une autre limite concerne la non-décidabilité au niveau informatique; l'application de règles non monotones nécessite généralement de vérifier la consistance entre des formules et des théories – mais cette vérification est non-décidable pour les logiques non monotones qui sont basées sur des langages logiques d'ordre un ou d'ordre supérieur.

### Propriétés des relations d'inférences

La relation d'inférence en logique non monotone est caractérisée par des propriétés (décrites plus bas) qui sont moins contraignantes que celles en logique monotone (Brewka et al, 1997). Ces propriétés moins contraignantes causent l'incertitude de la relation d'inférence en logique non monotone et rendent le traitement de la relation d'inférence plus difficile en logique non monotone qu'en logique monotone; la non-décidabilité de la vérification de la consistance entre des formules et des théories en logique non monotone résulte de l'incertitude liée à la relation d'inférence.

En logique classique d'ordre un (un type de logique monotone), la relation d'inférence, parfois notée  $\vdash$  (Brewka et al, 1997), est utilisée dans des formules telles que  $X \vdash a$ , indiquant que  $a$  est prouvable par la logique d'ordre un à partir de  $X$ . La relation d'inférence  $\vdash$  est caractérisée par les propriétés suivantes (où  $X$  est un ensemble fini, et  $X, a$  est une abréviation de  $X \cup \{a\}$ ):

- **Inclusion (réflexivité):**  $X, a \vdash a$  (tout élément inclu dans les prémisses est inférable à partir des prémisses)
- **Monotonie:** 
$$\frac{X \vdash a}{X, y \vdash a}$$
 (toute conclusion inférable à partir de prémisses demeure inférable à partir d'un surensemble de ces prémisses)
- **Coupure:** 
$$\frac{X \vdash y \quad X, y \vdash a}{X \vdash a}$$
 (un élément  $y$  peut être éliminé des prémisses sans perte de puissance si il est inférable des prémisses)

En logique non monotone une relation d'inférence, parfois notée  $\vdash$  (Brewka et al, 1997), est utilisée dans des formules telles que  $X \vdash a$ , indiquant que  $a$  est prouvable de façon non monotone à partir de  $X$ ; la relation d'inférence  $\vdash$  ne possède pas la propriété de monotonie. Selon les modèles de logique non monotone la relation d'inférence  $\vdash$  peut être caractérisée optionnellement par certaines des propriétés suivantes:

- **Supraclassicalité:** 
$$\frac{X \vdash a}{X \vdash a}$$
 (si  $a$  est inférable de façon monotone à partir de  $X$ , alors  $a$  est également inférable de façon non monotone à partir de  $X$ )
- **Monotonie prudente (sceptique):** 
$$\frac{X \vdash y \quad X \vdash a}{X, y \vdash a}$$
 (exprime la monotonie avec un axiome supplémentaire,  $X \vdash y$ , utilisé pour contraindre  $y$  à ne pas contredire  $a$ )
- **Inclusion:** (voir plus haut)
- **Coupure:** (voir plus haut)

Une inférence est dite cumulative si elle satisfait les quatre propriétés mentionnées plus haut: supraclassicalité, monotonie prudente, inclusion et coupure. L'inférence cumulative est ce qui se rapproche le plus de l'inférence de la logique classique sans être complètement monotone. L'inférence cumulative est hautement désirable en logique non monotone à cause qu'elle facilite le traitement des inférences.

Une inférence est dite préférentielle si elle est cumulative et satisfait la propriété suivante:

$$\frac{X, y \vdash a \quad X, z \vdash a}{X, y \vee z \vdash a}$$

### Aperçu des quatre modèles de logique non monotone les plus influents

Le tableau suivant illustre quelques correspondances entre quatre modèles de logique non monotone et les propriétés de leurs inférences (Brewka et al, 1997).

Propriétés des relations d'inférence	Exemples de modèle logique non monotone
Cumulative et préférentielle	• Supposition de monde fermé • Circonscription • Etc.
Non cumulative (et non préférentielle)	• Logique des défauts • Logique autoépistémique • Etc.

Tableau 1. Quelques correspondances entre les propriétés d'inférence avec les modèles de logique non monotone

Les modèles de logique non monotone listés dans ce tableau sont décrits plus en détails dans les quatre prochaines sous-sections. Ces modèles ont tous été introduits autour des années '80 et ils sont considérés comme les modèles les plus influents par beaucoup d'auteurs (Morgenstern, 1999; Brewka et al, 1997; Sombé, 1989). Parmi tous les modèles de logique non monotone, la logique des défauts est de loin le modèle le plus utilisé aujourd'hui (Brewka et al, 1997).

### Aperçu de la supposition de monde fermé

La supposition de monde fermé est un modèle de logique non monotone introduit par Ray Reiter en 1978 (Wikipedia, 2006; Morgenstern, 1999; Brewka et al, 1997; Sombé, 1989). Ce modèle suppose que par défaut, un ensemble d'axiomes donné est complet. Si une formule n'est pas incluse dans cet ensemble et ne peut pas être inférée à partir des informations disponibles alors on déduit sa négation jusqu'à preuve du contraire. Ce modèle minimise les formules vraies pour tous les prédicats (i.e. qu'il applique une forme forte de fermeture). De plus l'ajout de connaissances peut nécessiter de réviser les conclusions.

La supposition de monde fermé est utilisée par d'autres logiques non monotones dont la logique des défauts et la circonscription. Elle est souvent utilisée dans les systèmes de consultation de base de données dans des sous-domaines: e.g. si une base de données de vols aériens ne comprend pas de données pour un vol particulier et que ce vol ne peut pas être inféré à partir des données disponibles, alors on peut inférer selon la supposition de monde fermé que ce vol n'existe pas.

La supposition de monde fermé peut être formalisé avec la règle d'inférence suivante:  $\neg(\alpha / \sim \beta) / \sim (\alpha / \sim \neg\beta)$  (si  $\beta$  ne peut pas être inféré à partir de  $\alpha$  alors par défaut inférer  $\neg\beta$  à partir de  $\alpha$ ). Cette règle peut mener à des inconsistances: e.g. si la base d'information contient  $(\alpha \vee \beta)$  alors par la supposition de monde fermé on peut dériver  $(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ . Mais  $(\alpha \vee \beta)$  et  $(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$  sont inconsistants. Pour éviter ce problème on peut contraindre la forme des formules dans la base de connaissances.

### Aperçu de la logique des défauts

La logique des défauts est un modèle de logique non monotone introduit par Ray Reiter en 1980 (Wikipedia, 2006; Morgenstern, 1999; Brewka et al, 1997; Sombé, 1989): comme indiqué précédemment, Ray Reiter est également l'auteur de la supposition de monde fermé. La logique des défauts est aujourd'hui la logique non monotone la plus adoptée en recherche. Elle est basée sur la logique d'ordre un à laquelle est ajouté un nouveau type de règle d'inférence par défaut. Les règles par défaut sont utilisées pour spécifier les inférences typiques: e.g. "*Birds typically fly*" ou plus généralement "*by default, something is true*". Les inférences peuvent se faire à partir des défauts seulement si les conclusions sont consistantes avec la base de connaissances. Les inférences sont faites en appliquant autant de défauts que possible. Les

règles par défaut s'appliquent à la plupart des individus mais pas à tous; i.e. une proposition vraie donnée,  $P$ , est considérée vraie jusqu'à ce qu'une évidence additionnelle soit trouvée qui prouve que cette proposition soit fausse.

La forme générale d'une règle par défaut est: 
$$\frac{\alpha : \beta_1, \dots, \beta_n}{\gamma}$$
 (voir un exemples plus bas)

où

- $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n, \gamma$  : formules logiques d'ordre un.
- $\alpha$  : prérequis.
- $\beta_1, \dots, \beta_n$  : justification (formules de consistance).
- $\gamma$  : conclusion révisable (défaut).
- Signification : si  $\alpha$  est vrai et que chaque  $\beta_i$  pris individuellement est consistant avec ce qui est connu alors on peut inférer  $\gamma$ .

La justification est basée sur la supposition de monde fermé; pour chaque  $\beta_j$  si  $\neg\beta_j$  ne peut pas être dérivé de ce qui est connu alors on suppose que  $\beta_j$  est vérifié (i.e. consistant avec ce qui est connu).

On distingue les défauts normaux et les défauts anormaux. Les défauts normaux sont caractérisés par la similarité de leur justification et de leur conclusion:

E.g. 
$$\frac{\text{bird}(x) : \text{fly}(x)}{\text{fly}(x)} \quad (\text{birds typically fly})$$

La forme de ce type de défaut simplifie la modélisation et favorise la correspondance avec d'autres formalismes de règles.

Les défauts anormaux sont caractérisés par des différences entre leur justification et leur conclusion. Un cas particulier concerne les défauts semi-normaux dont les conclusions sont incluses dans les justifications.

E.g. 
$$\frac{\text{bird}(x) : \neg \text{penguin}(x), \text{fly}(x)}{\text{fly}(x)} \quad (\text{birds that are not penguins typically fly})$$

La forme de ce type de défaut favorise la prévention de conflits entre règles.

### Aperçu de la circonscription

La circonscription est un modèle de logique non monotone dont les deux principales versions ont été introduites par John McCarthy en 1980 et 1986 (Wikipedia, 2006h; Morgenstern, 1999; Brewka et al, 1997; Sombé, 1989). La deuxième version de la circonscription (1986) est basée sur la logique du second ordre afin de supporter les prédicats variables. La circonscription est également basée sur une forme réduite de supposition du monde fermé. Comme indiqué plus haut, la supposition du monde fermé minimise les propositions vraies en assumant que les formes négatives sont vraies. La circonscription applique la supposition du monde fermé qu'à quelques prédicats; i.e. qu'elle circonscrit ces prédicats.

La circonscription utilise des règles génériques qui s'appliquent aux cas normaux: e.g.

$$(\forall x) \text{bird}(x) \wedge \neg \text{Ab}(x) \mid \sim \text{fly}(x)$$

où

- un prédicat d'anormalité,  $\text{Ab}$ , permet de spécifier les cas anormaux;
- le prédicat  $\text{Ab}$  est circonscrit de façon à assumer  $\neg \text{Ab}(X)$  sauf si  $\text{Ab}(X)$  est connu pour être vrai.

Avec la règle précédente, si  $x$  est un oiseau ( $\text{bird}(x)$ ) et qu'il n'y a pas d'évidence indiquant l'anormalité de  $x$  ( $\neg \text{Ab}(x)$ ), alors on peut conclure que  $x$  peut voler ( $\text{fly}(x)$ ).

### Aperçu de la logique autoépistémique

La logique autoépistémique est un modèle de logique non monotone introduit par Robert Moore en 1985 (Wikipedia, 2006g; Morgenstern, 1999; Brewka et al, 1997; Sombé, 1989). La logique autoépistémique est la logique la plus employée parmi les logiques modales: une logique modale représente une ou plusieurs modalités telles que la possibilité, l'impossibilité, la nécessité,... par des opérateurs unaires (Wikipedia, 2006k).

La syntaxe de la logique autoépistémique est basée sur la logique d'ordre zéro ou sur la logique d'ordre un avec comme extension un opérateur modal de croyance parfois représenté par  $L$  ou  $\Box$ . Si  $F$  est une formule alors:

- $\Box F$  indique que  $F$  est cru (ou  $F$  est dans les croyances de l'agent);
- $\Box \neg F$  indique que  $\neg F$  est cru;
- $\neg \Box F$  indique que  $F$  n'est pas cru.

Cette syntaxe permet le raisonnement basé sur la connaissance des faits: e.g.

- $\neg \Box F \mid \sim \neg F$  indique que si  $F$  n'est pas cru être vrai, alors  $F$  est assumé être faux.
- $\Box \text{bird}(x) \wedge \neg \Box \neg \text{fly}(x) \mid \sim \text{fly}(x)$  indique que on si  $x$  est cru être un oiseau et qu'il n'est pas cru que  $x$  ne puisse pas voler, alors inférer que  $x$  peut voler.

## 4. Modélisation de l'acquisition de connaissances avec le raisonnement non monotone

### Raisonnement par abduction

Le raisonnement par abduction permet la modélisation de l'acquisition des connaissances. Il s'agit d'un processus d'inférence non monotone dérivant les explications les plus plausibles à partir de faits (Wikipedia 2006d). Les explications dérivées sont incertaines et peuvent devoir être retirées si elles sont inconsistantes avec de nouvelles informations.

Un exemple typique de raisonnement par abduction est présenté par Brewka et collègues (1997, p. 65). Si on observe un gazon mouillé, on peut supposer que la cause en est la pluie ou des gycleurs. Par contre, si on remarque ensuite que la rue adjacente n'est pas mouillée, alors on doit éliminer l'hypothèse de la pluie.

Le raisonnement par abduction peut être formalisé généralement par la formule suivante (Brewka et al, 1997, p. 65):

- $(b \wedge a \mid \sim b) \mid \sim (a)$  (i.e. si  $b$  et  $b$  est inférable de  $a$ , alors inférer  $a$ )

Le raisonnement par abduction est un processus pouvant être utilisé dans divers modèles non monotones: e.g.

- Les règles suivantes illustrent comment l'abduction peut être utilisée en logique autoépistémique:

$$((\forall x: P(x) \mid \sim Q(x)) \wedge Q(x) \wedge \square P(x)) \mid \sim P(x) \quad \text{ou} \quad ((a \mid \sim b) \wedge b \wedge \square a) \mid \sim a$$

- Les règles suivantes illustrent comment l'abduction peut être utilisée en logique des défauts:

$$\frac{((\forall x: P(x) \mid \sim Q(x)) \wedge Q(x) : P(x)}{P(x)} \quad \text{ou} \quad \frac{(a \mid \sim b) \wedge b : a}{a}$$

### Déduction, induction et abduction: trois méthodes d'acquisition de connaissances

La déduction, l'induction et l'abduction diffèrent par la nature de leurs prémisses et de leurs conclusions (Nicholas, 2001).

La déduction part de cas et de règle(s) pour inférer un résultat: e.g.

Cas: *Socrate est humain*  
Règle: *Tous les humains sont mortels*  
Résultat: *Donc, Socrate est mortel*

L'induction part de cas et de résultat(s) pour inférer une règle: e.g.

Cas: *Socrate est humain*  
Résultat: *Socrate est mortel*  
Règle: *Donc, tous les humains sont mortels*

L'abduction part de règle(s) et de résultat(s) pour inférer un cas: e.g.

Règle: *Tous les humains sont mortels*  
Résultat: *Socrate est mortel*  
Cas: *Donc, Socrate est humain*

Les valeurs de vérité des connaissances inférées par abduction ou induction sont incertaines. Les valeurs de vérité des connaissances inférées par déduction peuvent être soit certaines (c'est le cas en logique classique), soit incertaines (c'est généralement le cas en logique floue).

## 5. Remerciements

Ce travail a été financé par une bourse doctorale du Conseil de Recherches en Sciences Humaines du Canada (CRSH).

## 6. Références

Brewka, Gerhard, Jürgen Dix & Kurt Konoldige (1997). *Nonmonotonic Reasoning: an Overview*, Center for the Study of Language and Information, Lecture Notes Number 73, Stanford University.

Morgenstern, Leora (1999). Nonmonotonic Logics. In *MIT Encyclopedia of the Cognitive Sciences*, Robert A. Wilson & Frank Keil (Editors), The MIT Press. <http://www-formal.stanford.edu/leora/nonmon.pdf>

Nicholas, Nick (2001). *Re: Induction*, Newsgroup article on the topic on induction, <http://www.lojban.org/fr/lists/lojban-list/msg21027.html>

Sombé, Léa (1989). *Raisonnements sur des informations incomplètes en intelligence artificielle: comparaison de formalismes à partir d'un exemple*. Éditions Teknea.

Wikipedia (2006f). *Abductive reasoning*. Online article from Wikipedia encyclopedia. [http://en.wikipedia.org/wiki/Abductive\\_reasoning](http://en.wikipedia.org/wiki/Abductive_reasoning)

Wikipedia (2006g). *Autoepistemic logic*. Online article from *Wikipedia encyclopedia*. [http://en.wikipedia.org/wiki/Autoepistemic\\_logic](http://en.wikipedia.org/wiki/Autoepistemic_logic)

Wikipedia (2006h). *Circumscription*. Online article from *Wikipedia encyclopedia*. <http://en.wikipedia.org/wiki/Circumscription>

Wikipedia (2006i). *Closed world assumption*. Online article from *Wikipedia encyclopedia*.  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Closed\\_world\\_assumption](http://en.wikipedia.org/wiki/Closed_world_assumption)

Wikipedia (2006j). *Default logic*. Online article from *Wikipedia encyclopedia*. [http://en.wikipedia.org/wiki/Default\\_logic](http://en.wikipedia.org/wiki/Default_logic)

Wikipedia (2006k). *Modal logic*. Online article from *Wikipedia encyclopedia*. [http://en.wikipedia.org/wiki/Modal\\_logic](http://en.wikipedia.org/wiki/Modal_logic)

Wikipedia (2006m). *Non-monotonic logic*. Online article from *Wikipedia encyclopedia*. [http://en.wikipedia.org/wiki/Non-monotonic\\_logic](http://en.wikipedia.org/wiki/Non-monotonic_logic)